Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – THÉORIE DE LA GRAVITATION

– Première séance d'exercices –

relativité restreinte et groupe de Lorentz

« *Aide-mémoire* »

---

1 Informations pratiques…

- ◇ Mes coordonnées [1] :

Quentin Vandermiers – Quentin.Vandermiers@ulb.be – Bureau N.7.205

- ◇ 6 séances de 2 heures réparties sur le quadrimestre
- ◇ Références : pour n'en citer qu'une :

S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, 2004.

2 Quelques notions à garder en tête (ou sous les yeux)

2.1 Concepts fondamentaux

Deux postulats sont à la base de la relativité restreinte (RR) :

a. **Principe de relativité :** toutes les lois de la physique prennent la même forme dans tout référentiel inertiel (pas de référentiel inertiel privilégié) ;

b. **Universalité de la vitesse de la lumière :** la vitesse de la lumière dans le vide prend la même valeur dans tous les référentiels inertiels.

Pour rappel, un **référentiel inertiel** est un référentiel dans lequel, en l'absence de forces, un corps se meut en ligne droite, sans accélération ($\equiv$ validité du principe d'inertie).

2.2 Événements et intervalles d'espace-temps

- ◇ La RR est une théorie de l'espace-temps plat. Son cadre est l'**espace-temps de Minkowski**, noté $\mathcal{M}^{1,3}$ ou $\mathbb{R}^{1,3}$; cet espace est simplement $\mathbb{R}^4$ muni de la **métrique** $\eta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(-1,+1,+1,+1)$. (Remarquer la convention de signature par rapport au cours de QFT I. Pourquoi cette convention n'a-t-elle pas d'importance ?)

1. On ne sait jamais, ça peut toujours servir… ;-)

◇ On appelle **évènements** les points de l'espace-temps de Minkowski. Dans un référentiel donné, on représente un évènement par

$$x^\mu \equiv \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \quad (\mu = 0, 1, 2, 3).$$

Ici, $x^0 = ct$ est la coordonnée temporelle et x^i $(i = 1, 2, 3)$ sont les coordonnées d'espace. Sauf mention contraire, on travaillera en unités géométriques, $G = c = 1$ (*c.f.* exercice 0).

◇ **Intervalle d'espace-temps** entre deux évènements P et Q ($\equiv$ **distance Minkowskienne**) :

$$\left(\Delta s_{PQ}\right)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu_{PQ} \Delta x^\nu_{PQ} \equiv -\left(\Delta x^0_{PQ}\right)^2 + \sum_{i=1}^{3} \left(\Delta x^i_{PQ}\right)^2, \quad \text{avec } \Delta x^\mu_{PQ} \equiv x^\mu_Q - x^\mu_P.$$

◇ On utilise la convention de sommation implicite : les indices répétés deux fois sont sommés (*e.g.* $x^\mu x_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^{3} x^\mu x_\mu$). Sauf mention contraire, les indices grecs sont des indices d'espace-temps (« ils vont de 0 à 3 ») tandis que les indices latins (minuscules) sont des indices spatiaux (« ils vont de 1 à 3 »).

2.3 Groupe de Lorentz

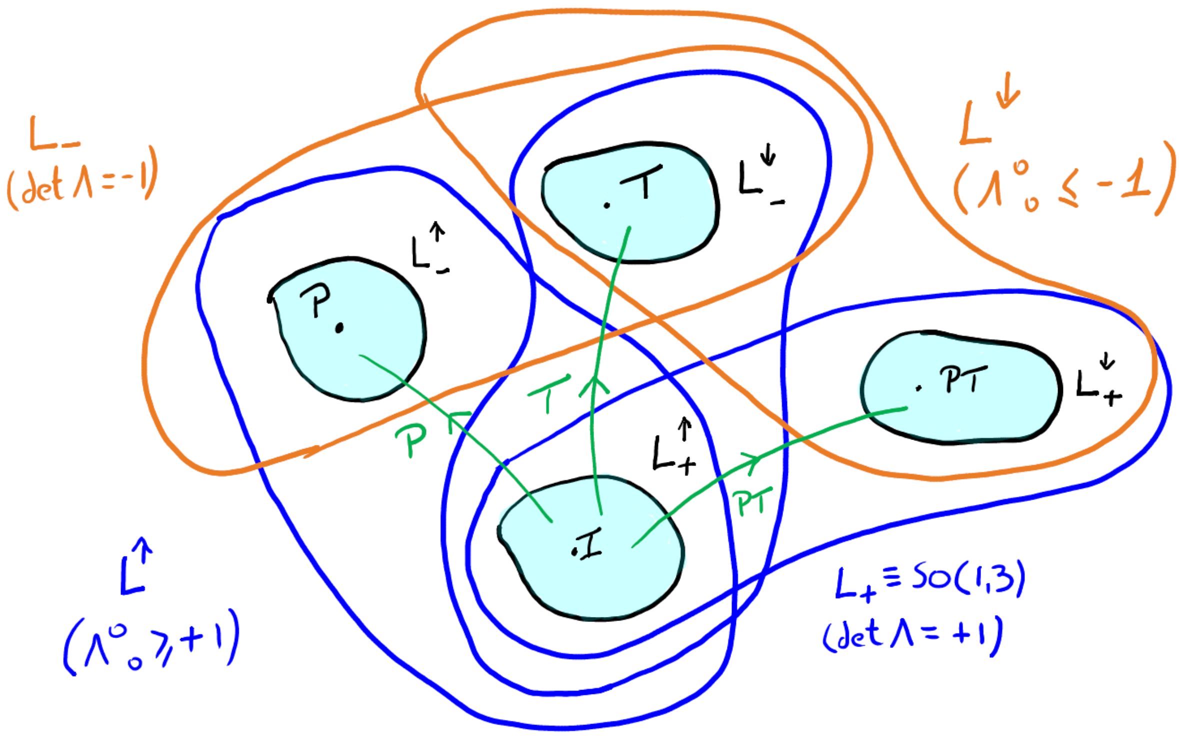

FIGURE 1 – Les quatre composantes connexes du groupe de Lorentz (en **cyan**). Les unions de ces quatre composantes entourées en **bleu** sont des sous-groupes de L, celles entourées en **orange** ne le sont pas.

Le **groupe de Lorentz** L est le groupe des transformations linéaires homogènes de $\mathcal{M}^{1,3}$ (**transformations de Lorentz**)

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

qui préservent la distance Minkowskienne, c-à-d telles que $(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2$. Formellement,

$$L \equiv O(1,3) \equiv \big\{\Lambda \in \text{End}\big(\mathbb{R}^{1,3}\big) \,|\, \Lambda^T \eta \, \Lambda = \eta\big\}.$$

Le groupe de Lorentz n'est pas simplement connexe. Il est constitué de quatre composantes connexes, *c.f.* figure 1 et votre cours de Théorie des Groupes de BA3 pour plus de détails. On se souviendra simplement ici de deux sous-groupes remarquables de L :

- Le groupe de Lorentz **orthochrone** $L^\uparrow$ est le sous-groupe de L qui préserve le sens d'écoulement du temps :

$$L^\uparrow \equiv O(1,3)^\uparrow \equiv \big\{\Lambda \in L \,|\, \Lambda^0{}_0 \geq 1\big\}.$$

- Les transformations de Lorentz qui préservent l'orientation de l'espace ($\equiv$ transformations de Lorentz **propres**) forment également un sous-groupe de L, noté L_+ :

$$L_+ \equiv SO(1,3)^\uparrow \equiv \{\Lambda \in L \,|\, \det \Lambda = 1\}.$$

L'intersection de ces deux sous-groupes est également un sous-groupe de L, le **groupe de Lorentz propre orthochrone** :

$$L_+^\uparrow = L_+ \cap L^\uparrow = \big\{\Lambda \in L \,|\, \det \Lambda = 1 \text{ et } \Lambda^0{}_0 \geq 1\big\}.$$

Ce sont souvent, par abus de langage, ces transformations auxquelles on se réfère lorsqu'on parle de « transformations de Lorentz ».

2.4 Quadri-vecteurs sur $\mathcal{M}^{1,3}$

L'espace-temps de Minkowski possède une structure d'espace vectoriel. C'est un cas particulier, et cette propriété ne sera pas vérifiée pour les espace-temps que nous étudierons plus tard. On introduira la notion de *tenseur sur une variété différentielle* durant la prochaine séance. Voici cependant quelques éléments dont il est bon de se souvenir pour aujourd'hui :

- Un **vecteur** v^μ en $P \in \mathcal{M}^{1,3}$ est un élément de l'espace vectoriel tangent $T_P\mathcal{M}^{1,3}$.
- Un **champ de vecteurs** est la donnée d'un vecteur en tout point de $\mathcal{M}^{1,3}$.
- Un **covecteur** ω_μ est un élément de l'espace cotangent $T_P^*\mathcal{M}^{1,3}$.
- La **métrique** $\eta_{\mu\nu}$ est un tenseur de rang $(0,2)$ qui implémente une notion de produit scalaire sur $\mathcal{M}^{1,3}$:

$$\cdot : T_P\mathcal{M}^{1,3} \times T_P\mathcal{M}^{1,3} \to \mathbb{R} : (u,v) \mapsto u \cdot v \equiv u^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu}.$$

- La métrique établit également un isomorphisme entre $T_P\mathcal{M}^{1,3}$ et $T_P^*\mathcal{M}^{1,3}$. En particulier, la position (haut ou bas) des indices a de l'importance. On « monte et on descend les indices » avec $\eta_{\mu\nu}$. Par exemple, $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$, et on a $x_i = x^i$ ($i = 1,2,3$), mais $x_0 = x{-}^0$.

◇ La **norme** d'un vecteur v^μ est définie au moyen du produit scalaire induit par la métrique :

$$v^2 \equiv v^\mu v^\nu \eta_{\mu\nu}.$$

Cette norme est en réalité une pseudo-norme (car pas définie positive). On classe les vecteurs en trois catégories :

★ v^μ est de **genre temps** si $v^2 < 0$;
★ v^μ est de **genre lumière** si $v^2 = 0$;
★ v^μ est de **genre espace** si $v^2 > 0$.

2.5 Cônes de lumières

La structure causale de $\mathcal{M}^{1,3}$ est très différente de celle de l'espace-temps de la mécanique classique non-relativiste : au lieu d'une division basique en « tranches » qui représentent l'espace à un instant donné, il est structuré par les cônes de lumières, qui déterminent les trajectoires possibles des particules. En outre, la notion de simultanéité devient relative.

Soit $P \in \mathcal{M}^{1,3}$ on appelle **cône de lumière** en P l'ensemble C_P des points de $\mathcal{M}^{1,3}$ situés à une distance nulle de P :

$$C_P \equiv \left\{ Q \in \mathcal{M}^{1,3} \,|\, (\Delta s_{PQ})^2 = 0 \right\}.$$

On le divise naturellement entre **cône de lumière futur** C_P^+ et **cône de lumière passé** C_P^- :

$$C_P^\pm \equiv \left\{ Q \in C_P \,|\, \Delta x^0_{PQ} \equiv x^0_Q - x^0_P \gtrless 0 \right\}.$$

Le cône de lumière C_P sépare l'espace-temps en trois régions distinctes :

◇ Le **futur absolu** (ou causal) de P, qui est l'union de C_P^+ et de son intérieur. On le note $J^+(P)$;
◇ Le **passé absolu** (ou causal) de P, qui est l'union de C_P^- et de son intérieur. On le note $J^-(P)$;
◇ L'**ailleurs absolu** de P, qui est l'extérieur de C_P.

Pour une justification de ces terminologies, *c.f.* exercices 1 et 2.

2.6 Courbes causales et temps-propre

◇ Une **courbe** γ est une application

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathcal{M}^{1,3} : \lambda \mapsto x^\mu(\lambda).$$

Sauf mention contraire, on supposera toujours que les fonctions $x^\mu(\lambda)$ sont (infiniment) continument dérivables.

◇ Le **vecteur tangent** d'une courbe est [2]

$$v^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\lambda},$$

Une courbe est de genre temps/espace/lumière si son vecteur tangent est partout de genre temps/espace/lumière.

2. Sans commettre d'abus de langage : les composantes du champ de vecteurs tangents.

- ◇ On appelle **ligne d'univers** la courbe décrivant la trajectoire d'une particule ou d'un observateur à travers l'espace-temps.
- ◇ Une **courbe causale** est une courbe dont le vecteur tangent (i) est partout de genre temps ou lumière et (ii) est partout orienté vers le futur, *i.e.*

$$v^2 \leq 0 \text{ et } v^0 > 0.$$

  Les courbes causales décrivent les trajectoire possibles des particules et des signaux transportant de l'information.
- ◇ La **longueur d'une courbe causale** γ ou **temps-propre** est

$$\tau \equiv \int_\gamma \mathrm{d}\tau \qquad \text{avec } \mathrm{d}\tau^2 = -\mathrm{d}s^2 = \left(\mathrm{d}x^0\right)^2 - \sum_i \left(\mathrm{d}x^i\right)^2.$$

  Les lignes droites causales sont les courbes causales qui maximisent le temps-propre (*c.f.* exercice 6).
- ◇ Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\mathcal{M}^{1,3}$.
  - ★ Le **futur chronologique** $I^+(\mathcal{S})$ est l'ensemble de tous les points de $\mathcal{M}^{1,3}$ qui peuvent être joints à $\mathcal{S}$ par une courbe de genre temps orientée vers le futur ;
  - ★ Le **futur causal** $J^+(\mathcal{S})$ est l'union de $\mathcal{S}$ lui-même avec tous les points de $\mathcal{M}^{1,3}$ qui peuvent être joints à un point de $\mathcal{S}$ par une courbe causale ;
  - ★ On définit similairement le **passé chronologique** $I^-(\mathcal{S})$ et le **passé causal** $J^-(\mathcal{S})$.
- ◇ Soit une courbe de genre temps. Si l'on choisit de paramétriser la courbe par son temps propre τ, alors son vecteur tangent $u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$ est normé à -1 :

$$u^\mu u_\mu = -1.$$

  On appelle alors u^μ la **quadri-vitesse.** La **quadri-accélération** a^μ est définie par

$$a^\mu \equiv \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}.$$

2.7 Maths en vrac !

Sur un espace vectoriel V muni d'un produit interne $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on définit la norme induite d'un vecteur $v \in V$ par $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Pour tous $u, v \in V$, on a l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$